УДК 621.391:519.27(024)

В.П. Денисюк, д-р фіз.-мат. наук
А.А. Світлична

НЕПРЯМИЙ МЕТОД ОЦІНЮВАННЯ КОРЕЛЯЦІЙНИХ ФУНКЦІЙ

Інститут комп'ютерних технологій НАУ, e-mail: kvomden@nau.edu.ua

Встановлено аналітичний зв'язок між оцінками кореляційної функції, побудованої прямим і непрямим методами, що дало можливість з'ясувати природу властивостей цих оцінок.

Аналіз проблеми

При розв'язанні багатьох задач науки і техніки часто доводиться оцінювати кореляційні функції стаціонарних випадкових процесів. Оцінка кореляційних функцій є важливим етапом обробки результатів вимірювань і може бути здійснена різними методами. При цьому слід враховувати такі фактори.

По-перше, оцінюється не одна величина, а функція. Але функцію можна оцінювати або в окремих точках, або в цілому її аналітичний вираз.

По-друге, при оцінці виявляються кореляційні зв'язки між оцінками функції у різних областях існування.

Тому на практиці застосовують два типи оцінок. До першого типу відносять точкові оцінки, коли оцінюють значення функції в окремих точках, до другого – оцінки параметрів аналітичного подання кореляційної функції.

Оскільки на практиці неперервні сигнали в результаті проведення дискретизації замінюються послідовністю своїх значень, то часто будують точкові оцінки кореляційної функції, тобто використовують оцінки першого типу.

При побудові точкових (дискретних) оцінок кореляційних функцій застосовуються два підходи – прямий і непрямий. Прямий підхід побудови точкових оцінок кореляційної функції полягає в тому, що обчислення інтегралів, через які подається кореляційна функція, здійснюється чисельними методами.

Непрямий підхід до побудови точкових оцінок кореляційних функцій полягає в тому, що спочатку обчислюються коефіцієнти інтерполяційного тригонометричного многочлена; ці коефіцієнти з відповідним нормуванням використовують у ролі оцінок спектральної щільності потужності досліджуваного процесу. Знаючи оцінки спектральної щільності потужності, обчислюють значення точкових оцінок кореляційної функції. Цей метод побудови точкових оцінок кореляційної функції було запропоновано А. Шустером, і він відомий як метод періодограм.

Теоретичне обґрунтування методу періодограм дав Н. Вінер у тридцятих роках минулого сторіччя. Ним було отримано ряд важливих результатів, до яких слід віднести строгі статистичні означення автокореляції та спектральної щільності потужності для стаціонарних випадкових процесів. Також він довів, що ці дві функції пов'язані неперервним перетворенням Фур'є; це співвідношення базується на відомій теоремі Вінера–Хінчина [1].

Хоча прямий і непрямий підходи є різними за ідеологією їх побудови, вони часто приводять до практично однакових результатів [2; 3]. Проте науковцям не вдалося знайти аналітичний зв'язок між цими двома підходами, який становить неабиякий як теоретичний, так і практичний інтерес.

Мета роботи

Установлення аналітичного зв'язку між прямим і непрямим методами оцінювання кореляційних функцій.

Виклад основного матеріалу

1. Нехай $\xi(t)$ – випадковий, дійсний, гільбертів, стаціонарний у широкому розумінні процес.

Як відомо, математичне сподівання випадкового процесу визначається за формулою

$$m = \mathrm{M}[\xi(t)], \tag{1}$$

а кореляційна функція –

$$R(\tau) = M\{[\xi(t) - m_0][\xi(t+\tau) - m_0]\}, \tag{2}$$

де M – оператор математичного сподівання.

На практиці випадковий процес $\xi(t)$ завжди спостерігається на скінченному інтервалі часу.

Для того, щоб мати можливість оцінити значення математичного сподівання і кореляційної функції, необхідно прийняти припущення про те, що має місце ергодична теорема відносно перших чотирьох моментів, існування яких теж припускається.

У цьому випадку замість точних значень математичного сподівання і кореляційної функції, що визначаються формулами (1) та (2), можна використовувати їх оцінки m_T і $R_T(\tau)$, що обчислюються за відомими формулами:

$$m_T = \frac{1}{T}\int_0^T \xi(t)dt\,; \tag{3}$$

$$R_T(\tau)=\frac{1}{T-\tau}\int_0^T[\xi(\tau)-m_T][\xi(t+\tau)-m_T]\,dt. \quad (4)$$

Можна показати, що оцінка (3) є слушною, а оцінка (4) асимптотично слушною[1]. Зрозуміло, що при $\tau=0$ маємо оцінку дисперсії.

Разом з оцінкою (4) часто розглядають і таку оцінку [1]:

$$R_T(\tau)=\frac{1}{T}\int_0^T[\xi(\tau)-m_T][\xi(t+\tau)-m_T]\,dt, \qquad (5)$$

яка відрізняється від оцінки (4) лише нормуванням і є зсунутою.

2. При практичних дослідженнях часто розглядають процес, на неперервному інтервалі часу $[0,T]$ і процес, значення якого співпадають зі значеннями першого процесу на деякій дискретній множині рівновіддалених точок, що належать цьому неперервному інтервалу. При цьому процес, заданий на дискретній множині значень з $[0,T]$, називають вкладеним. Така ситуація виникає, наприклад, під час дослідження процесів на виході аналого-цифрового перетворювача.

У таких випадках у ролі оцінок середньої та кореляційної функцій вкладеного процесу використовують оцінки математичного сподівання

$$m_N=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\xi_i\ ; \qquad (6)$$

$$R_N(p)=\frac{1}{N-p}\sum_{k=1}^{N-p}(\xi_k-m_N)(\xi_{k+p}-m_N), \qquad (7)$$

в які входять лише значення вкладеного процесу; ці оцінки нескладно отримати шляхом обчислення інтегралів, що входять у формули (3), (4) чисельними методами [3]. При цьому оцінки кореляційної функції вкладеного процесу, що будуються за формулою (7), є точковими оцінками значень кореляційної функції неперервного випадкового процесу у відповідних точках. І в цьому випадку при $p=0$ ми маємо оцінку дисперсії.

Підхід, при якому оцінки дисперсії та кореляційної функції обчислюють за формулою (7), часто називають прямим підходом.

3. На практиці для обчислення точкових оцінок значень кореляційної функції часто використовують і непрямий підхід. Цей підхід заснований на тому, що спочатку будуються оцінки спектральної щільності потужності випадкового процесу, а потім з допомогою оберненого перетворення Фур'є оцінюються значення кореляційної функції. При цьому в ролі оцінок спектральної щільності потужності використовуються періодограми, запропоновані А. Шустером ще у 1898 році, і які являють собою відповідним чином нормовані квадрати модуля коефіцієнтів тригонометричного многочлена, що інтерполює значення вкладеного процесу [2]. Отримані таким чином оцінки кореляційної функції є циклічними [3].

Як уже зазначалося, у відомій авторам літературі не розглядається питання аналітичного зв'язку між оцінками кореляційної функції, побудованими цими двома підходами. Оскільки встановлення такого зв'язку є важливим питанням, розглянемо його детальніше.

Нехай на відрізку $[0,2\pi]$ спостерігається реалізація $\xi(t)$ стаціонарного (у широкому розумінні), ергодичного відносно четвертого моменту, випадкового процесу $X(t)$. У результаті дискретизації реалізація цього процесу замінюється послідовністю $\{\xi_i\}_{i=1}^N$, ($N=2n+1$, $n=1,2,\ldots$) своїх миттєвих значень $\xi(t_i)=\xi_i$ у деякі рівновіддалені моменти часу $\{t_i\}_{i=1}^N$, $t_i=h(i-1)$, де $h=2\pi/N$ – крок дискретизації.

Отже, послідовністю $\{\xi_i\}_{i=1}^N$ є послідовність значень вкладеного процесу.

Послідовність вкладеного процесу центруємо таким чином. Обчислюємо оцінку математичного сподівання за формулою (6) і утворюємо нову послідовність $\{\xi_i^*\}_{i=1}^N$, кожен член якої розраховуємо як

$$\xi_i^*=\xi_i^*-m_N, \qquad i=1,2,\ldots,N.$$

Надалі члени центрованої послідовності $\{\xi_i^*\}_{i=1}^N$ будемо позначати через $\{\xi_i\}_{i=1}^N$.

Згідно з ідеєю А. Шустера, побудуємо тригонометричний многочлен $T_N(x)$, що інтерполює центровану послідовність $\{\xi_i\}_{i=1}^N$. Як відомо, цей многочлен має вигляд

$$T_N(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}[a_k\cos kt+b_k\sin kt], \qquad (8)$$

де коефіцієнти $a_0, a_k, b_k,\ \ k=1,2,\ldots,n,$ визначаються за формулами

$$a_0=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\xi_i\ ;$$

$$a_k=\frac{2}{N}\sum_{j=1}^{N}\xi_i\cos kt_i\ ;$$

$$b_k=\frac{2}{N}\sum_{j=1}^{N}\xi_i\sin kt_j\ ;$$

$$k=1,2,\ldots,n.$$

Оскільки послідовність $\{\xi_i\}_{i=1}^{N}$ є центрованою, то $a_0 = 0$.

Зауважимо також, що тригонометричний інтерполяційний многочлен (8) є періодичною функцією з періодом 2π.

Коефіцієнти a_k, b_k, $k = 1,2, \dots n$ є саме тими коефіцієнтами, що використовуються у періодограмному аналізі А. Шустера.

Зручнішою буде інша форма запису тригонометричного інтерполяційного многочлена, а саме:

$$T_N(t) = \sum_{k=1}^{N} \xi_K S_K(t), \qquad (9)$$

де

$$S_k(t) = \frac{1}{N}\left[1 + 2\sum_{j=1}^{n} \cos j(t - t_k)\right].$$

Зауважимо, що функції $S_k(t)$ є фундаментальними на множині $\{t_i\}_{i=1}^{N}$, тобто задовольняють співвідношення

$$S_k(t_i) = \begin{cases} 1, & i = k; \\ 0, & i \neq k. \end{cases}$$

Підставляючи вираз (9) у рівняння (5) після нескладних, але вельми об'ємних перетворень, отримуємо таку формулу:

$$R(\tau) = A(\tau)\left[\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \xi_k^2\right] + \sum_{p=1}^{N-1} B(p,\tau)\left[\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-p} \xi_k \xi_{k+p}\right], \qquad (10)$$

де

$$A(\tau) = \frac{1}{N}\left(1 + 2\sum_{j=1}^{n} \cos j\tau\right);$$

$$B(p,\tau) = \frac{2}{N}\left(1 + 2\sum_{j=1}^{n} \cos j\tau \cos jph\right).$$

Враховуючи оцінки (5), (7), вираз (10) можна подати у вигляді

$$R(\tau) = A(\tau) R_N(0) + \sum_{p=1}^{N-1} B(p,\tau) R_N(p). \qquad (11)$$

Зазначимо, що отриманий вираз (11) містить у явному вигляді вирази типу (7) для оцінки дисперсії і кореляційної функції із множниками $A(\tau)$ і $B(p,\tau)$. Графіки цих множників зображені на рис. 1, 2.

Функція $A(\tau)$ набуває значення 1 при $\tau = 0$ і дорівнює 0 у точках t_i, $i = 1,2,\dots N$; в свою чергу, функція $B(p,\tau)$ є бімодальною і дорівнює 1 в точках t_p і t_{N-p}, та дорівнює 0 в інших точках множини $\{t_i\}_{i=1}^{N}$. Отже, при $\tau = 0$ маємо оцінку дисперсії згідно з формулою (7); при $\tau = t_i$, $i = 1,2,\dots N$ маємо оцінку кореляційної функції згідно з формулою (7), причому ця оцінка внаслідок бімодальності функції $B(p,\tau)$ є циклічною у тому розумінні, що виконується співвідношення [3]

$$R(p) = R_N(p) + R_N(N - p).$$

Вважається, що ефектом циклічності можна знехтувати для швидко затухаючих кореляційних функцій. Крім того, існують рекомендації, згідно з якими для усунення (або послаблення) ефекту циклічності доцільно доповнювати значення вкладеного процесу такою самою кіль-кістю нулів.

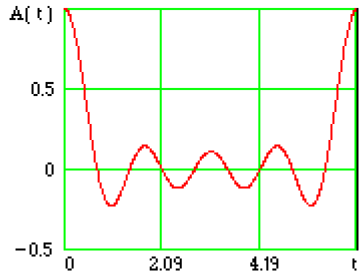
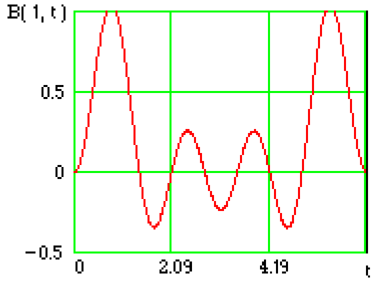
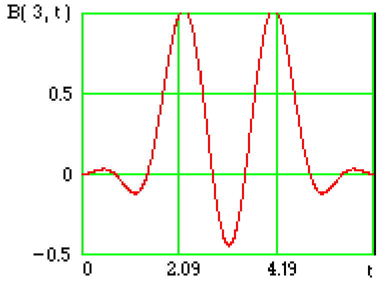


Рис. 1. Графік множника $A(\tau)$ для випадку $N = 9$



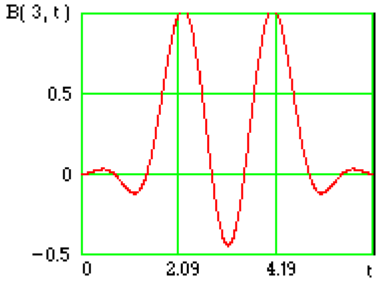
а



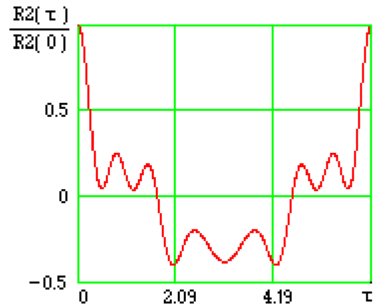
б

Рис. 2. Графіки множників $B(p,\tau)$ для різних значень параметра p: *а* – $p = 1$; *б* – $p = 3$

У роботі перевірялася ця рекомендація. Результати такої перевірки показано на рис. 3.



а



б

Рис. 3. Оцінка нормованої кореляційної функції, отримана за N відліками (a) і за N відліками, доповненими N нулями ($б$)

Нескладно побачити, що штучне доповнення значень вкладеного процесу такою самою кількістю нулів, по-перше, спотворює оцінку кореляційної функції, а по-друге, не усуває ефект циклічності.

Слід відзначити той факт, що при $\tau \neq t_i$, $i = 1,2,\ldots N$ оцінка кореляційної функції визначається всім ходом цієї функції, а не лише її поведінкою в безпосередньому околі τ; зокрема, навіть при великих значеннях τ ця оцінка залежить від дисперсії, яка є значенням кореляційної функції при $\tau = 0$.

Отже, отримана оцінка кореляційної функції, яка залежить від дискретних значень вкладеного процесу, є неперервною, на відміну від відповідної оцінки, побудованої з використанням прямого підходу. У багатьох випадках це є досить суттєвою перевагою непрямого підходу до оцінювання кореляційної функції.

Висновки

Установлено аналітичний зв’язок між точковими оцінками кореляційної функції, побудованими за значеннями вкладеної послідовності прямим і непрямим методами.

Установлення такого зв’язку дозволило з’ясувати природу властивостей оцінки кореляційної функції оцінки, побудованої непрямим методом. Так, зокрема, зрозуміло, що явище циклічності оцінки кореляційної функції, отриманої непрямим методом, виникає внаслідок бімодальності функції $B(p,\tau)$.

Список літератури

1. *Марпл С.Л.* Цифровой спектральный анализ и его приложения. – М.: Мир, 1990. – 584 с.
2. *Виленкин С.Я.* Статистическая обработка результатов исследования случайных функций. – М.: Энергия, 1979. – 320 с.
3. *Бендат Дж., Пирсол А.* Измерение и анализ случайных процессов. – М.: Мир, 1974. – 464 с.

Стаття надійшла до редакції 01.02.05.

В.П. Денисюк, А.А. Светличная

Косвенный метод оценки корреляционных функций

Установлена аналитическая связь между оценками корреляционной функции, построенной прямым и косвенным методами, что дало возможность выяснить природу свойств этих оценок.

V.P. Denysyuk, A.A. Svetlichnaya

Indirect method estimates of correlation function

The connection between estimates of correlation function constructed by direct and indirect methods is considered in this paper that had enabled to find out a nature of properties of these estimates.